DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

NOTATIONS, BUT DU PROBLEME. R est l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels $x \geq 0$. Pour tout entier $n > 0$, on note $M_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{R}$. Si A est un ensemble fini, card A est le nombre d'éléments de A.

E désigne un espace euclidien. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $\langle x,y\rangle$. On pose, pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Un vecteur unitaire de E est un vecteur $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, où n est un entier ≥ 1, on prend pour $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel défini par $\langle (x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. L'ensemble des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ est noté S_n. Il est rappelé que si deux vecteurs x et y sont des éléments de S_n, on a d'après l'inégalité de Schwarz, $-1 \leq \langle x,y\rangle \leq 1$.

L'objectif du problème est l'étude de sous-ensembles finis A de S_2 ou S_3 tels que les produits scalaires de deux vecteurs de A, distincts l'un de l'autre, soient tous égaux, ou aient tous la même valeur absolue.

PARTIE I.

On suppose, dans cette partie, que E est un espace euclidien de dimension 2. On considère une base orthonormale (e_1,e_2) de E. Pour tout θ, élément de $\mathbb{R}$, on désigne par r_θ la rotation de E définie par

$$r_\theta(e_1) = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2 \quad ,$$

et qui est donc telle que $r_\theta(e_2) = -(\sin\theta)e_1 + (\cos\theta)e_2$.

1) Soit α un réel vérifiant $-1 \leq \alpha \leq 1$, et soit $\theta = \text{Arc}\cos\alpha$.

a) Montrer que pour deux vecteurs unitaires x et y de E, les propriétés (*i*) et (*ii*) suivantes sont équivalentes

(*i*) $\langle x,y\rangle = \alpha$. (*ii*) $x = r_\theta(y)$ ou $y = r_\theta(x)$.

b) On suppose qu'il existe des vecteurs unitaires x,y,z de E, distincts deux à deux, tels que $\langle x,y\rangle = \langle y,z\rangle = \langle z,x\rangle = \alpha$. Montrer que $\theta = \frac{2}{3}\pi$ et que $\{x,y,z\} = \{x, r_\theta(x), r_\theta^2(x)\}$. En déduire que si un vecteur unitaire $t \in E$ est tel que $\langle t,x\rangle = \alpha$, alors $t = y$ ou $t = z$.

Tournez la page S. V. P.

2) On pose $\theta = \frac{2}{3}\pi$. Soit A un sous-ensemble fini de E tel que card A ≥ 3 , et constitué de vecteurs unitaires de E. Montrer que les propriétés (*i*) et (*ii*) suivantes sont équivalentes

(*i*) Quel que soit $(u,v,u',v') \in A^4$ vérifiant $u \neq v$, $u' \neq v'$, on a $\langle u,v\rangle = \langle u',v'\rangle$,

(*ii*) Il existe un vecteur unitaire $\xi \in E$ tel que $A = \{\xi, r_\theta(\xi), r_\theta^2(\xi)\}$.

PARTIE II.

Dans toute cette partie, on suppose que $E = \mathbb{R}^3$.

1) Soient k un entier et β un réel vérifiant $k \geq 4$ et $-1 \leq \beta \leq 1$ .On suppose qu'il existe des vecteurs $u_1,\ldots,u_k$ de S_3, deux à deux distincts, et tels que $\langle u_i,u_j\rangle = \beta$ pour tout (i,j), $1 \leq i < j \leq k$.

a) Montrer que $\beta \neq 1$ et que $\beta \neq -1$.

b) Montrer qu'il existe un, et un seul $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $i = 1,\ldots,k-1$, u_k soit orthogonal à $u_i + \lambda u_k$. A quoi est égal λ ?

c) Pour tout $i = 1,\ldots k-1$ on pose $v_i = u_i + \lambda u_k$, où λ a la valeur trouvée en b). Déterminer la valeur des produits scalaires $\langle v_i,v_j\rangle$ pour $1 \leq i \leq j \leq k-1$.

d) Montrer que les vecteurs $w_1,\ldots,w_{k-1}$ tels que $w_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$, sont des vecteurs unitaires, deux à deux distincts, appartenant à un plan vectoriel $F \subset E$.

Vérifier que pour $1 \leq i < j \leq k-1$, on a $\langle w_i,w_j\rangle = \frac{\beta}{(1+\beta)}$. En déduire que $\beta = -\frac{1}{3}$ et que k=4 (on pourra utiliser le I 2)).

e) Soient G un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 et t un vecteur appartenant à S_3, orthogonal à G. On considère des vecteurs unitaires u, v, w de G tels que $\langle u,v\rangle = \langle v,w\rangle = \langle w,u\rangle = -\frac{1}{2}$.

Pour tout $(\mu,\nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on pose

$$A_{\mu,\nu} = \{t,(\mu u + \nu t),(\mu v + \nu t),(\mu w + \nu t)\} .$$

Déterminer les couples $(\mu,\nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} A_{\mu,\nu} \subset S_3 , \\ \langle U,V\rangle = -\frac{1}{3} \text{ quel que soit } (U,V) \in A_{\mu,\nu} \times A_{\mu,\nu} , U \neq V . \end{cases}$$

PARTIE III.

1) Pour tout entier $k \geq 2$, et pour tous réels a et b, on désigne par $P_k(a,b)$ la matrice de $M_k(\mathbb{R})$ dont tous les termes diagonaux sont égaux à a, et dont tous les termes non diagonaux sont égaux à b.

a) En utilisant par exemple une combinaison linéaire convenable des colonnes, puis des lignes de $P_k(a,b)$, montrer que le déterminant de $P_k(a,b)$ est égal à $[a + (k-1)b].(a-b)^{k-1}$.

b) Soient $u_1,\ldots,u_k$, $k \geq 2$, des vecteurs unitaires, deux à deux distincts, d'un espace euclidien E. On suppose qu'il existe un réel c tel que $\langle u_i,u_j\rangle = c$ pour tout couple d'entiers (i,j) vérifiant $1 \leq i < j \leq k$. Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ des réels tels que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = 0$; montrer que $P_k(1,c).\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_k\end{bmatrix} = 0$. En déduire que si $c \neq 1$ et si $c \neq -\frac{1}{k-1}$, les vecteurs $u_1,\ldots,u_k$ constituent une partie libre de E.

Jusqu'à la fin de la partie III, on suppose que $E = \mathbb{R}^3$. On considère un sous-ensemble fini B de S_3, tel que card B = 4 : $B = \{u_1,u_2,u_3,u_4\}$, et tel que $\langle u_i,u_j\rangle = -\frac{1}{3}$ quel que soit le couple d'entiers (i,j) vérifiant $1 \leq i < j \leq 4$.

2) Montrer que trois vecteurs de B, deux à deux distincts, constituent une base de E. Quelles sont les composantes du vecteur u_4 dans la base (u_1,u_2,u_3) ?

3) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un, et un seul $(m_1,m_2,m_3,m_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\sum_{i=1}^{4} m_i = 1$ et $x = \sum_{i=1}^{4} m_i u_i$.

4) On désigne par T l'ensemble des $x \in E$ tels que $x = \sum_{i=1}^{4} m_i u_i$ avec $\sum_{i=1}^{4} m_i = 1$ et $(m_1,m_2,m_3,m_4) \in (\mathbb{R}_+)^4$.

Soit f un automorphisme orthogonal de E; on se propose de démontrer que les propriétés (*i*) et (*ii*) suivantes sont équivalentes

(*i*) $f(B) = B$, (*ii*) $f(T) = T$.

a) Montrer que (*i*) entraine (*ii*).

Tournez la page S. V. P.

b) On suppose la propriété *(ii)* vérifiée. Soient $u \in B$ et $v = f(u)$; pourquoi v est-il élément de T ? On pose $v = \sum_{i=1}^{4} m_i u_i$, avec $\sum_{i=1}^{4} m_i = 1$ et $(m_1, m_2, m_3, m_4) \in (R_+)^4$.

Montrer que $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{4} m_i^2 - \frac{2}{3} \sum_{1 \le i < j \le 4} m_i m_j$. Calculer $(\sum_{i=1}^{4} m_i)^2 - \|v\|^2$ et montrer que $\sum_{1 \le i < j \le 4} m_i m_j = 0$. En déduire qu'il existe $i \in \{1,2,3,4\}$ tel que $m_i = 1$ et $m_j = 0$ pour tout $j \in \{1,2,3,4\}$, $j \neq i$. Conclure.

5) On désigne par $\mathcal{G}$ le groupe des bijections de B sur B. Soit $\sigma \in \mathcal{G}$.

a) Montrer qu'il existe un endomorphisme et un seul $\bar{\sigma}$ du R-espace vectoriel E tel que $\bar{\sigma}(u_i) = \sigma(u_i)$ pour tout $i = 1,2,3$ (on pourra utiliser le III 2)).

b) Montrer que $\bar{\sigma}$ est un automorphisme orthogonal de E.

c) En remarquant que $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$, montrer que $\bar{\sigma}(u_i) = \sigma(u_i)$ pour tout $i = 1,2,3,4$.

d) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ des automorphismes orthogonaux g de E tels que $g(T) = T$ est un sous-groupe du groupe orthogonal de E. Utiliser ce qui précède pour montrer que l'application qui à $g \in \mathcal{C}$ associe la restriction de g à B , est un isomorphisme de groupes de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{G}$. A quoi est égal card $\mathcal{C}$?

e) Pour tous $i,j = 1,2,3,4$, $i \neq j$,on désigne par H_{ij} le plan vectoriel orthogonal à $(u_i - u_j)$, et par τ_{ij} la symétrie orthogonale par rapport à H_{ij}. Utiliser l'isomorphisme entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{G}$ pour montrer que tout élément de $\mathcal{C}$ est l'application composée d'un nombre fini de τ_{ij}.

PARTIE IV

On se propose d'étudier les parties C de $E = R^3$ telles que

$$(*) \quad \begin{cases} C \subset S_3, \\ |\langle U,V \rangle| = |\langle U',V' \rangle| \text{ pour tout } (U,V,U',V') \in C^4,\ U \neq V,\ U' \neq V'. \end{cases}$$

1) On considère un plan vectoriel $G \subset E$ et un vecteur t de S_3 orthogonal à G. Soit $\gamma \in R$, $0 \le \gamma < 1$; on sait qu'il existe des vecteurs unitaires u_1 et u_2 appartenant à G, tels que $\langle u_1, u_2 \rangle = \gamma$.

a) Déterminer des réels φ, ψ, η tels que $u_3 = \varphi u_1 + \psi u_2 + \eta t$ vérifie $\|u_3\| = 1$, $\langle u_1, u_3 \rangle = \gamma$, $\langle u_2, u_3 \rangle = \gamma$.

b) On pose $s = \frac{2\gamma}{1-\gamma}$. On considère un vecteur u_3 de E vérifiant les conditions du a); montrer qu'il existe un et un seul réel ω tel que les vecteurs $v_i = \omega (u_1 + u_2 + u_3) - s\, u_i$, $i = 1,2,3$, vérifient $\langle v_i, u_i \rangle = -\gamma$ et $\langle v_i, u_j \rangle = \gamma$ si $i \neq j$. Déterminer γ pour que ces vecteurs v_1, v_2, v_3 soient unitaires et montrer qu'alors l'ensemble $\{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ remplit les conditions (*).

2) Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques appartenant à $M_3(R)$: $\mathcal{S}$ est un sous-R-espace vectoriel de $M_3(R)$ et l'application Φ de $\mathcal{S}$ dans $E \times E$ définie par

$$\Phi : \begin{bmatrix} a & a' & b' \\ a' & b & c' \\ b' & c' & c \end{bmatrix} \longrightarrow \Big[(a,b,c),(a',b',c')\Big] ,$$

est un isomorphisme de R-espaces vectoriels (on ne demande pas d'établir ces dernières propriétés).

a) Montrer qu'on définit un produit scalaire $[\ldots]$ sur $E \times E$ en posant $[(X,X'),(Y,Y')] = \langle X,Y \rangle + 2 \langle X',Y' \rangle$.

b) On note $tr\ M$ la trace d'une matrice $M \in M_3(R)$ ($tr\ M$ est la somme des éléments diagonaux de M). Montrer que si M et N sont deux matrices appartenant à $\mathcal{S}$ on a $tr\ (M\,N) = [\Phi(M), \Phi(N)]$. En déduire qu'on définit un produit scalaire $(./.)$ sur $\mathcal{S}$ en posant $(M/N) = tr\ (M\,N)$ pour tout couple (M,N) de matrices de $\mathcal{S}$.

3) Soit $\delta \in R$, $0 \le \delta < 1$ et soient $U_1, \ldots, U_k$ des vecteurs appartenant à S_3, tels que $|\langle U_i, U_j \rangle| = \delta$ pour tous $i,j = 1,\ldots,k$, $i \neq j$. Pour tout $i = 1,\ldots,k$ on désigne par π_i l'endomorphisme de E défini par $\pi_i(e) = \langle e, U_i \rangle\, U_i$, et par M_i la matrice de π_i dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de E.

a) Soit $(i,j,\ell) \in \{1,\ldots,k\} \times \{1,\ldots,k\} \times \{1,2,3\}$.
Calculer $\langle \pi_i \circ \pi_j(e_\ell), e_\ell \rangle$; montrer que $tr\ (M_i M_i) = 1$ et $tr\ (M_i M_j) = \delta^2$ si $i \neq j$.

b) Déduire de ce qui précède que toute partie C de E satisfaisant (*) est telle que card $C \le 6$ (on pourra utiliser le III 1) b)).

* * *

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail